

# MAT3020 SOYUT CEBİR FİNAL SORULARI

Ad-Soyad :...CEVAP ANAHTARI.....

14.05.2018

No:.....

**Soru 1)  $\mathbb{Z}_{24}$ 'de 3 ile bölünebilen sayıların kümesi bir halka mıdır? Birimli midir? Değişmeli midir?**

Sözü edilen küme  $\{0,3,6,9,12,15,18,21\}$  alt kümesidir. Bu kümenin toplama göre değişmeli grup, çarpmaya göre birleşmeli olduğu ve dağılma özelliklerinin sağlandığı kolayca görülebilir. Birim eleman 9'dur. Çarpmaya göre değişmelilik de aşikârdır.

**Soru 2)  $D_6/C_3$  bölüm grubunun elemanlarını bulunuz. Bu grup kaç elemanlıdır? Etkisiz elemanı nedir?**

$D_6 \cong \{e, a, a^2, a^3, a^4, a^5, b, ab, a^2b, a^3b, a^4b, a^5b\}$  olsun. Bölüm grubu oluşturabilmemiz için  $C_3$  normal alt grubunu  $\{e, a^2, a^4\}$  olarak seçeriz. Bölüm grubu da  $D_6/C_3 \cong \{C_3, C_3a, C_3b, C_3ab\}$  olur. 4 elemanlıdır ve etkisiz elemanı  $C_3$  kosetidir.

**Soru 3)  $\mathbb{Z}_n$  halkasında  $(x+y)^n = x^n+y^n$  eşitliği her zaman doğru mudur? Açıklayınız.**

$(x+y)^n$  Binom açılımı yapıldığında her bir terimin katsayısı  $\binom{n}{k}$  olur.  $n$  asal iken  $n$ 'nin  $k=0$  ve  $k=n$  dışındaki tüm  $k$ 'lar için  $\binom{n}{k}$  sayısını böldüğü sayılar teorisinden bilinir. Bu durumda  $\mathbb{Z}_n$  halkasının karakteristiği  $n$  olduğundan aradaki tüm terimlerin katsayıları sıfır olacaktır ve eşitlik doğrudur. Ancak  $n$  asal değilken bazı  $\binom{n}{k}$  katsayıları  $n$  ile bölünmeyeceğinden bu açılım sadece asal  $n$  değerleri için doğrudur.

**Soru 4)  $C_{2n}$  devirli grubu,  $D_n$  dihedral grubuna izomorf mudur? Açıklayınız.**

Her iki grup  $2n$  elemanlıdır. Ancak eleman sayılarının eşit olmasının grupların izomorfik olmasına yetmediği bilinen bir sonuçtur. Örneğin 4 elemanlı  $C_4$  ve  $V_4$  grupları izomorf değildir.  $C_{2n}$  devirli grubu tek eleman tarafından üretilebilir ve böyle bir elemana  $a$  dersek  $a$ 'nın mertebesi  $2n$ 'dir. Ancak  $D_n$ 'deki en yüksek mertebeli eleman  $n$ -inci mertebededir ve  $2n$  mertebeli eleman bulunmaz. İkinci bir sebep de devirli grupların sadece dönmelerden, dihedral grupların ise dönme ve yansımalarından oluştuğudur. Sadece  $n=1$  için 2 elemanlı tek bir grup var olduğundan  $C_2$  ve  $D_1$  grupları izomorftur.

**Soru 5)  $f:G \rightarrow G'$  bir monomorfizm ise  $\text{Ker } f$  alt kümesinin bir normal altgrup olması gerekir mi?  $G/\text{Ker } f$  bölüm grubunu hesaplayınız.**

Her monomorfizmin çekirdeği birebirlik gereği tek elemandan yani  $e$ 'den oluşur. Bu nedenle aşikâr altgrup olur. Bu da normaldir. Bölüm grubu da  $G/\{e\} \cong G$  olur.

**Not: Süre 70 dakikadır. Başarılar. İNC**